Les nombres complexes

Prof. Smail BOUGUERCH

Définition:

L'ensemble des nombres complexes s'écrit : $\mathbb{C} = \left\{ z = a + ib \; / \; (a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1 \right\}$

L'écriture algébrique d'un nombre complexe:

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

- $a + ib$ est l'écriture algébrique du nombre complexe z
- Le nombre a est la partie réelle de z, notée : $\mathrm{Re}(z)$
- Le nombre b est la partie imaginaire de z, notée : $\mathrm{Im}(z)$

Cas particulier:

- Si $\mathrm{Im}(z) = 0$, alors z est un nombre réel
- Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, alors z est un nombre imaginaire pur

Egalité de deux nombres complexes:

Soit z et z' deux nombres complexes

$$z = z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$$

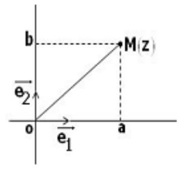
Représentation graphique d'un nombre complexe:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

On relie le nombre complexe z avec le point $M\,(a;b)$

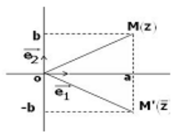
Le nombre z s'appelle l'affixe du point M et le point M s'appelle l'image du nombre z et on écrit : $M\,(z)$



Conjugué d'un nombre complexe:

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

Le conjugué du nombre complexe z est le complexe noté $\bar{z}$ avec $\bar{z} = a - ib$



$M'(\bar{z})$ و $M(z)$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

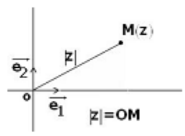
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z'}}$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad (z' \neq 0)$

- $\bar{z} = z \Leftrightarrow$
- $\bar{z} = -z \Leftrightarrow$
- $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)$
- $z \times \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

Module d'un nombre complexe:

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

Le module du nombre complexe z est le nombre réel positif $|z|$ avec : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

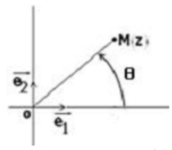


$\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n \; ; \; n \in \mathbb{N}^*$	$\lvert -z \rvert = \lvert z \rvert$	$\lvert z \times z' \rvert = \lvert z \rvert \times \lvert z' \rvert$
$\lvert \bar{z} \rvert = \lvert z \rvert$	$\left\lvert \dfrac{1}{z'} \right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z' \rvert} \; (z' \neq 0)$	$\left\lvert \dfrac{z}{z'} \right\rvert = \dfrac{\lvert z \rvert}{\lvert z' \rvert} \; (z' \neq 0)$

L'argument d'un nombre complexe non nul:

Soit z un nombre complexe non nul et M son image
L'argument du nombre complexe z est θ l'un des mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{OM}\right)$

On le note: $\arg(z)$ et on écrit: $\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$



La forme trigonométrique et la notation exponentielle d'un nombre complexe non nul:

Soit z un nombre complexe non nul
On pose : $r=|z|$ et $\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$

- La forme trigonométrique du complexe z est : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=[r,\theta]$
- La notation exponentielle du complexe z est : $z=re^{i\theta}$

Cas particulier:

L'écriture trigonométrique (réduite) d'un nombre réel a non nul

$a\succ 0$	$a\prec 0$
$a=[a,0]$	$a=[-a,\pi]$
$ai=\left[a,+\frac{\pi}{2}\right]$	$ai=\left[-a,-\frac{\pi}{2}\right]$

$\arg(zz')=(\arg(z)+\arg(z'))[2\pi]$	$[r,\theta]\times[r',\theta']=[r\times r',\theta+\theta']$	$re^{i\theta}\times r'e^{i\theta'}=(r\times r')e^{i(\theta+\theta')}$
$\arg(\bar{z})=-\arg(z)[2\pi]$	$\overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]$	$\overline{re^{i\theta}}=re^{-i\theta}$
$-\arg(z)=(\pi+\arg(z))[2\pi]$	$-[r,\theta]=[r,\pi+\theta]$	$-re^{i\theta}=re^{i(\pi+\theta)}$
$\arg(z^n)=n\arg(z)[2\pi]$	$[r,\theta]^n=[r^n,n\times\theta]$	$\left(re^{i\theta}\right)^n=r^ne^{in\theta}$
$\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)[2\pi]$	$\frac{1}{[r,\theta]}=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]$	$\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$
$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=(\arg(z)-\arg(z'))[2\pi]$	$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$	$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}}=\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

- $\forall k\in\mathbb{Z}\ ;\ [r,\theta+2k\pi]=[r,\theta]$

- $\arg(z)=k\pi\Leftrightarrow z$ est un réel $(k\in\mathbb{Z})$
- $\arg(z)=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur $(k\in\mathbb{Z})$

Formule de MOIVRE:

$$\forall n\in\mathbb{N}$$
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

Formules d'EULER:

$$\forall\theta\in\mathbb{R}$$
$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\text{ et }\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Résolution de l'équation $z^2=a$ $(z\in\mathbb{C})$ avec $(a\in\mathbb{R})$:

L'équation		Ensembles de solutions
$z\in\mathbb{C}\ ;\ z^2=a$	$a\succ 0$	$S=\{-i\sqrt{a};i\sqrt{a}\}$
	$a=0$	$S=\{0\}$
	$a\prec 0$	$S=\{-i\sqrt{-a};i\sqrt{-a}\}$

Résolution de l'équation $z \in \mathbb{C}$; $az^2 + bz + c = 0$ avec a et b et c des réels et $a \neq 0$:

L'équation		Ensembles de solutions
$z \in \mathbb{C}$; $az^2 + bz + c = 0$ $(\Delta = b^2 - 4ac)$	$\Delta \succ 0$	$S = \left\{ \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$
	$\Delta = 0$	$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$
	$\Delta \prec 0$	$S = \left\{ \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} ; \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\}$

Notions géométriques:

La notion géométrique	La relation complexe
La distance AB	$AB = \lvert z_B - z_A \rvert$
I centre du segment $[AB]$	$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
Mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$	$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$
A et B et C des points alignés	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
A et B et C et D des points cocycliques	$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}$ ou $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$

La relation complexe	La notion géométrique
$\lvert z - z_A \rvert = r$; $(r \succ 0)$	$AM = r$ M appartient au cercle de centre A et de rayon r
$\lvert z - z_A \rvert = \lvert z - z_B \rvert$	$AM = AB$ M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC est un triangle rectangle au point A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta]$	ABC est un triangle isocèle au point A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC est un triangle rectangle et isocèle au point A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\frac{\pi}{3}\right]$	ABC est un triangle équilatéral

La représentation complexe de quelques transformations usuelles:

La transformation	La représentation complexe
La translation : $t_{\vec{u}}$	$z' = z + b$, avec b est l'affixe du vecteur $\vec{u}$
L'homothétie : $h(\Omega; k)$	$z' - \omega = k(z - \omega)$, avec ω l'affixe du point Ω
La rotation : $R(\Omega; \theta)$	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$, avec ω l'affixe du point Ω